9/5/2017

Κύκλος μήκους κ στην S_n είναι μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ για την οποία υπάρχει ένα υποσύνολο $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$: $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ..., $\sigma(i_{k-1}) = i_k$, $\sigma(i_k) = i_1$ και

$\sigma(j) = j$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

Τότε $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_2, i_3, \ldots, i_k, i_1) = \ldots = (i_k\ i_1 \ldots i_{k-1})$

$= (i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \ldots, \sigma^{k-1}(i_1)\}$

Αν $\sigma=(i_1, i_2 \dots i_k) \in S_n$ $\quad \tau=(j_1\, j_2 \dots j_\lambda) \in S_n$

Οι κύκλοι λέγονται ξένοι αν-ν $\sigma \cap \tau = \emptyset$ (δηλαδή

αν-ν $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1\, j_2 \dots\} = \emptyset$

Πρόταση: Ξένοι κύκλοι στην S_n μετατίθενται

Απόδειξη: Έστω δυο ξένοι κύκλοι σ, τ ώστε $\{i_1, i_2 \dots i_k\} \cap \{j_1 j_2 \dots j_\lambda\} =$

Θα δείξουμε ότι $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$

Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι $\forall a = 1, 2, \dots, n \Rightarrow (\sigma \circ \tau)(a) = (\tau \circ \sigma)(a)$

1η περίπτωση: Αν $a \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cup \{j_1\, j_2 \dots j_\lambda\}$

τότε $\sigma(a) = a = \tau(a)$. Άρα $\sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = a = \tau(\sigma(a))$

2η Περίπτωση: Αν $a \in \{i_1, i_2 \dots i_k\} \Rightarrow a \notin \{j_1\, j_2 \dots j_\lambda\}$

Άρα, $a = i_r$, ώστε $1 \leq r \leq k$. Επομένως $\sigma(a) = \sigma(i_r) \begin{cases} i_{r+1}, & r<k \\ i, & r=k \end{cases}$

Και $\tau(a) = a$

Τότε $\sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = \sigma(i_r) = \begin{cases} i_{r+1}, & r<k \\ i, & r=k \end{cases}$

$$\tau(\sigma(a)) = \tau(\sigma(i_r)) \begin{array}{l} \xrightarrow{r<k} \tau(i_{r+1}) = i_{r+1} \\ \xrightarrow{r=k} \tau(i) = i \end{array}$$

Άρα $\tau(\sigma(a)) = \begin{cases} i_{r+1}, & r<k \\ i, & r=k \end{cases} = \sigma(\tau(a))$

(3) Ανάλογα, αν $a \in \{j_1, j_2, \dots, j_\lambda\}$ τότε $a \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

τότε και πάλι $\sigma(\tau(a)) = \tau(\sigma(a))$

Παράδειγμα:

Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6)$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 8)$

$\sigma_3 = (4\ 7\ 5)$

Όμως $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ Άρα η σ είναι γινόμενο ξένων κύκλων και άρα μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά, δηλαδή $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3$

Παρατήρηση: Έστω $\sigma \in S_n$ και $i \in \{1,2,\dots,n\}$ τότε ορίζουμε ως $[i]_\sigma = \{\sigma^m(i) \mid m \in \mathbb{Z}\}$: τροχιά του i μέσω της σ. Τότε $[i]_\sigma \subseteq \{1,2,\dots,n\} \Rightarrow |[i]_\sigma| \leq n \Rightarrow$ τα στοιχεία $\sigma^m(i)$, $m \in \mathbb{Z}$ δεν είναι όλα διαφορετικά

$\Rightarrow \exists k,\lambda \in \mathbb{Z} : k \neq \lambda \quad \sigma^k(i) = \sigma^\lambda(i)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{αν } k < \lambda : \sigma^{\lambda-k}(i) = i \\ \text{αν } \lambda < k : \sigma^{k-\lambda}(i) = i \end{cases}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $\exists m \in \mathbb{N} : \sigma^m(i) = i$

Έστω τώρα $r = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m(i) = i\}$. Τότε:

$[i]_\sigma = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)\}$.

Προφανώς $\{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)\} \subseteq [i]_\sigma$ (1)

Έστω $\sigma^m \in [i]_\sigma$. Από Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε ότι

$m = q \cdot r + s$, $s = 0,1,2,\dots,r-1$

$$\sigma^m(i) = \sigma^{q\cdot r+s}(i) = \sigma^s(\sigma^{r\cdot q}(i)) = \sigma^s(\sigma^r)^q(i) = \sigma^s(i)$$

Όμως $s = 0,1,2,\dots,r-1$. Άρα $\sigma^m(i) = \sigma^s(i) \in \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)\}$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow [i]_\sigma = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)\}$

Τότε $[i]_r \longmapsto (i\ \sigma(i)\ \dots\ \sigma^{r-1}(i)\}$: κύκλος μήκους r

Αντίστροφα, αν $\sigma = (i_1\ i_2 \dots i_r)$: κύκλος μήκους r, τότε

$\forall i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$: $[i]_\sigma = \{i_1\ i_2 \dots i_r\} = \{i\ \sigma(i) \dots \sigma^{r-1}(i)\}$

Άρα $[i]_\sigma$: η τροχιά του κύκλου $\{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{r-1}(i)\}$

Θεώρημα: Κάθε μη-ταυτοτική μετάθεση $\sigma \in S_n$, μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ξένων κύκλων.

Απόδειξη: Έστω ότι $1 \neq \sigma \in S_n$

(1) Υποθέτουμε ότι $\sigma(1) \neq 1$ [Αν $\sigma(1) = 1$, επιλέγουμε το μικρότερο στοιχείο $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $\sigma(i) \neq i$ και δουλεύουμε όπως παρακάτω: ένα τέτοιο στοιχείο i υπάρχει διότι $\sigma \neq 1$]

Θεωρούμε την τροχιά του 1 μέσω της σ:

$[1]_\sigma = \{\sigma^m(1) \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k_1 - 1}(1)\}$

όπου $k_1 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m(1) = 1\}$

$[1]_\sigma \mapsto \sigma_1 = (1, \sigma(1), \dots, \dots, \sigma^{k-1}(1))$: κύκλος μήκους $k_1 \geq 2$

(αν $k_1 = 1$, τότε $[1]_\sigma = \{1\}$ και $\sigma(1) = 1$: άτοπο)

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $\in \{1, 2, \dots, n\}$ το οποίο δεν ανήκει στην $[1]_\sigma$. Υποθέτουμε ότι $2 \notin [1]_\sigma$ και τότε $\sigma(2) \neq 2$. Θεωρούμε την $[2]_\sigma$. Τότε $[2]_\sigma = \{2, \sigma(2) \dots \sigma^{k-1}(2)\}$

όπου $k_2 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma^m(2) = 2\}$, άρα $[2]_\sigma \mapsto \sigma_2 = (2\ \sigma(2) \dots \sigma^{k_2 - 1}(2))$

κύκλος μήκους k_2. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία

αποκτούμε κύκλους μήκους $k_i \geq 2$, $1 \leq i \leq r$.

Εξαντλώντας τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ και τότε θα έχουμε τους κύκλους $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ οι οποίοι έχουν προκύψει από τις τροχιές $[1]_\sigma, [2]_\sigma, \dots, [r]_\sigma$ των στοιχείων $1, 2, \dots, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ και $\{1, 2, \dots, n\} = [1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup \dots \cup [r]_\sigma$

Οι κύκλοι σ_1 και σ_2 είναι ξένοι. Πράγματι, αν δεν ήταν ξένοι θα υπήρχε $x \in [1]_\sigma \cap [2]_\sigma \Rightarrow x = \sigma^k(1) = \sigma^\lambda(2)$

$\Rightarrow \sigma^{k-\lambda}(1) = 2 \Rightarrow 2 \in [1]_\sigma$: άτοπο διότι το 2

επιλέχθηκε να είναι το μικρότερο του $\{1,2,\ldots,n\}$:

$2 \notin [1]_\sigma$ και $\sigma(2) \neq 2$

Μένει να δείξω ότι αν $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r \Rightarrow \sigma(x) = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r)(x)$

$\forall x \in \{1,2,\ldots,n\} = [1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup \ldots \cup [r]_\sigma$

$\Rightarrow \exists\ i = 1,2,\ldots,r : x \in [i]_\sigma$

Οι κύκλοι $\sigma_r, \sigma_{r-1}, \ldots \sigma_{i+1}$ αφήνουν το x σταθερό, διότι $i \notin [r]_\sigma \cup \ldots \cup [i+1]_r$. Ο κύκλος σ_i θα στείλει το x στο $\sigma(x)$. Οι υπόλοιποι κύκλοι $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$ αφήνουν το $\sigma(x)$ σταθερό διότι $\sigma(x) \notin [1]_\sigma \cup [2]_\sigma \cup \ldots \cup [i-1]_\sigma$

Άρα $(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r)(x) = \sigma(x)$, $\forall x \in \{1,2,\ldots,n\}$

Άρα $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r$

Η ανάλυση της σ ως γινόμενο ξένων κύκλων είναι μοναδική (αν εξαιρέσουμε τη σειρά των κύκλων στο γινόμενο)

Παράδειγμα

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 & 12 & 9 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_{12}$

$[1]_\sigma = \{1, 10, 8, 12\} \mapsto \sigma_1 = (1\ 10\ 8\ 12)$: κύκλος μήκους 4

$[2]_\sigma = \{2, 11, 4, 7, 5\} \mapsto \sigma_2 = (2\ 11\ 4\ 7\ 5)$: κύκλος μήκους 5

$[3]_\sigma = \{3, 6\} \mapsto \sigma_3 = (3\ 6)$: κύκλος μήκους 2

$[9]_\sigma = \{9\} \mapsto \sigma_4 = i$

Άρα $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

Πρόταση: Η τάξη ενός κύκλου μήκους k είναι ίση με k

Απόδειξη: Έστω $\sigma = (i_1\ i_2 \ldots i_k)$: κύκλος μήκους $k \geq 1$, $\sigma(j) = j$ $\forall j \in \{1, 2, \ldots n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_3 & i_4 & \ldots & i_2 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_4 & i_5 & \ldots & i_3 \end{pmatrix}$

$\ldots \quad \sigma^{k-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_k & i_1 & \ldots & i_{k-1} \end{pmatrix}$

$\sigma^k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$

Άρα, $k=0$ ο μικρότερος θετικός ακέραιος

μ.ο. $\sigma^m = i$. Άρα $o(\sigma) = k$ = μήκος του κύκλου σ.

Παράδειγμα

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

$\sigma = (1\ 7\ 10\ 8\ 9\ 2\ 6)$: κύκλος μήκους 7

$o(\sigma) = 7$

Πρόταση: Έστω $\sigma, \tau \in S_n$ είναι ξένοι κύκλοι.

Τότε $o(\sigma \circ \tau) = [o(\sigma), o(\tau)]$

Απόδειξη: Έστω ότι σ: κύκλος μήκους $x \Rightarrow o(\sigma) = x$

τ: κύκλος μήκους $y \Rightarrow o(\tau) = y$

Θέτουμε $k = [o(\sigma), o(\tau)] = [x, y]$. Θα δείξουμε ότι

$o(\sigma \circ \tau) = k$. Οι κύκλοι σ, τ ξένοι $\Rightarrow \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}\quad (\sigma \circ \tau)^m = \sigma^m \tau^m$ (1)

Θα δείξουμε ότι $(\sigma \circ \tau)^k = i$. Όμως $k = [x, y] \Rightarrow k = x \cdot \mu$

$k = y \cdot \nu$

όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$

Τότε $(\sigma \circ \tau)^{k} \overset{(1)}{=} \sigma^{k} \circ \tau^{k} = \sigma^{x \cdot \mu} \circ \tau^{y \cdot \nu} = (\sigma^{x})^{\mu} \circ (\tau^{y})^{\nu} = i^{\mu} \circ i^{\nu} = i$

Άρα $(\sigma \circ \tau)^{k} = i$ (2)

Έστω ότι $M \in \mathbb{N} : (\sigma \circ \tau)^{M} = i \overset{(1)}{\Longrightarrow} \sigma^{M} \cdot \tau^{M} = i \Rightarrow \sigma^{M} = \tau^{-M}$

$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_x)$, $\tau = (j_1\ j_2\ \dots\ j_y)$

Επειδή σ, τ είναι ξένοι $\Rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_x) \cap (j_1, j_2, \dots, j_y) = \emptyset$

Η μετάθεση σ^{M} είναι μια μετάθεση των $i_1, i_2, \dots, i_x$ και αφήνει σταθερά τα υπόλοιπα, άρα και τα $j_1, j_2, \dots, j_y$

Η μετάθεση τ^{-M} είναι μια μετάθεση των $j_1, j_2, \dots, j_y$ και αφήνει σταθερά τα $i_1, i_2, \dots, i_x$

Αν $\sigma^{M} = \tau^{-M} \neq i$ τότε η $\sigma^{M} = \tau^{-M}$ θα εναλλάσσει κάποια από τα $i_1, i_2, \dots, i_x$ και ταυτόχρονα θα τα αφήνει σταθερά (άτοπο). Άρα, $\sigma^{M} = i = \tau^{-M} = \tau^{M}$.

Άρα, $o(\sigma) = x \mid M$
$o(\tau) = y \mid M$ $\Rightarrow k = [x, y] = [o(\sigma), o(\tau)] \mid M \Rightarrow k \leq M$

Από (2) & (3) $\Rightarrow k = [x, y]$ $\square$

Πρόταση: Αν $\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_k \in S_n$ και κάθε σ_i κύκλος, $1\leq i\leq k$

Και υποθέτουμε ότι οι κύκλοι $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ είναι ανά δύο ξένοι

Τότε $o(\sigma)=[o(\sigma_1), o(\sigma_2),\ldots, o(\sigma_k)]$

Απόδειξη: Επαγωγικά (το βήμα 2 είναι η προηγούμενη πρόταση).

Παράδειγμα.

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 10 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

$$\sigma=(1\ 9\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7)(8\ 10)$$

$$o(\sigma)=[3,3,2,2]=[3,2]=6$$

$$\sigma^{100}=\sigma^{96\cdot 6+4}=(\sigma^6)^{96}\cdot\sigma^4=\sigma^4$$

Αν $\sigma \in S_n$ και $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ γινόμενο ξένων κύκλων

και μήκος του $\sigma_i = r_i$, $i=1,2,\ldots,k$ δηλαδή $o(\sigma_i)=r_i$, $1\le i\le k$

Προφανώς $r_1+r_2+\ldots+r_k \le n$

$o(\sigma) = [r_1, r_2, \ldots, r_k]$

Πρόταση: Αν $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$: κύκλος μήκους k στην S_n.

τότε $\sigma^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_2, i_1)$

Απόδειξη: Θα έχουμε $(i_1, i_2, \ldots, i_k)\cdot(i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1)$

$$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots & i_{k-1} & i_k \\ i_1 & i_2 \ldots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix}$$

Η μετάθεση αυτή στέλνει κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ στο j. Άρα είναι η ταυτοτική μετάθεση

Άρα, $\sigma^{-1} = (i_k\ i_{k-1}\ \ldots\ i_2\ i_1)$

Παράδειγμα: Αν $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$: γινόμενο ξένων κύκλων. Τότε $\sigma^{-1} = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1} \sigma_{k-1}^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$

Έτσι από την ανάλυση της σ σε ξένους κύκλους παίρνουμε την ανάλυση της σ^{-1} σε ξένους κύκλους

Ορισμός: Δυο μεταθέσεις σ, τ καλούνται συζυγείς μεταθέσεις αν-ν $\exists \rho \in S_n$: $\rho \cdot \sigma \cdot \rho^{-1} = \tau$

Δεύτερα 6-9 αναπλήρωση.